嘉義市第三十六屆中小學科學展覽會

作品說明書

?+?=1

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：合而為「1」

關 鍵 詞：質數 、　因數　、異分母分數的加減

編　　號：

作品名稱

合而為「1」

摘要

族長按照三兄弟父親的遺囑為他們分配遺產，不但讓每個人分得比遺囑上寫得還多的駱駝，而且族長也沒損失任何駱駝，這個結果引發我們的好奇心，決定要探究這其中的奧祕。在研究的過程中，我們也發現許多問題，並逐一探討、研究。在探討的過程中，我們發現（1）族長能巧妙的為三兄弟解決問題的原因（2）這個難題中，駱駝的數目可以換成別的數字（3）只要符合二個原則的數字，都可以成為難題中駱駝數目的數字（4）根據這樣的原則，我們逆向思考創造了不一樣的新遊戲。

壹、 研究動機

暑假期間，我在書上看到了一則有趣的故事，這則故事的大意是這樣的：古波斯王國有位老人，在他死後留下 17 隻駱駝及一張遺囑給他的三個孩子。遺囑上寫著老大得到二分之一的駱駝，老二分到三分之一，老三則得到九分之一。但是問題來了，17 隻駱駝無法整除於二、三或九，這三個兒子因此傷透腦筋，而且還大吵了起來，最後他們只好去請族長來幫忙解決。族長聽完整個事情的經過後，笑咪咪的送給他們 1 隻駱駝，再讓他們三兄弟依照遺囑的內容來分駱駝，所以老大分得了 9 隻，老二得到 6 隻，而老三則得到 2 隻，大家都很高興的帶走了他們的駱駝，而族長也把自己的駱駝帶回家。看完這個故事，我覺得很神奇，這個族長是怎麼辦到的呢？我想了很久，還是找不出答案，因此就去找老師討論。

貳、研究目的

為了探究族長解決爭產問題的技巧，我們決定以記錄及歸納的方式找出解答。並根據研究目的，在探索過程中，我們逐次設定了幾個研究問題：

一、如何能將數目無法整除的駱駝，按比例將駱駝「完整」的分配好，又不犧牲任何人的權利呢？

二、是否還有其他數目的駱駝能做如此分配呢？

三、符合什麼樣條件的數字才能「雀屏中選」呢？

四、逆向思考，我們能不能創造出另一種的新題目呢？

參、研究設備及器材

紙、筆、筆記本、電腦。

肆、研究過程或方法

一、解開族長巧妙分配遺產的祕密：

老師看完了故事後，拿筆在紙上算了一下後說：「我給妳一個提示——想想看，遺囑上要分配的數目和這三個兒子最後拿走的數目一樣多嗎？」並要我回去再仔細思考。我聽了老師的提示後，就算了一下下面的算式：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

但是$\frac{17}{18}<1$

所以，如果按照老人的遺囑，他的三個兒子並不會分完所有的駱駝，只是族長為了幫三兄弟順利的分配財產於是「送」給他們一隻駱駝，使得要分配的駱駝變多了，一般人當然會欣然接受。然而遺囑上分配比例的總和小於 1，表示這樣分配並不會分配完全部的駱駝

$(17\times\frac{17}{18}<17)$。難怪族長可以分給他們三人比遺囑寫的還多（17÷2=8.5<9，17÷3≒5.7<6，17÷9≒1.9<2）的駱駝，而且族長也不會損失任何駱駝。我將這個發現告訴老師，老師很高興的誇獎了我一番。後來我拿這個題目去問同學，結果她告訴我，她在另一本書上也看到了相同的難題，只不過題目中人物的角色不同，而且要分的東西換成 CD 罷了。

我們交換看了彼此的書之後，產生了一個共同的疑問，這樣的問題，只能設計成這組數字嗎？有沒有其他組數字可以滿足這樣的題目呢？有了這個想法之後，我們決定一起進行研究。

二、是否「它」是我們的唯一

首先，我們先去分析這幾個數字（17、2、3、9、18）的關係：

17：是個「質數」，因此它的因數除了它本身之外就只有「1」了。

18=17+1，而 2、3、9 三個數都是 18 的因數，而且這些因數的倒數和等於 $\frac{17}{18}$，即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$。

瞭解了這組數字彼此間的關係後，我們便大膽假設，按照這個規則可以找到其他組這樣關係的數字，來滿足這類型的題目的條件要求。我們先嘗試找一個最接近「17」，而且比「17」大的質數——「19」來進行試驗，並依照先前分析的規則，再來進行檢驗，我們研究的記錄如下：

19+1=20

20 的因數有：1、2、4、5、10、20

它們的倒數為 $\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{20}$

因數的倒數和是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{22}{20}$（我們沒有將「1」列入，因為「1」已經大於我們要求的數了），但是這樣的結果與我們所預期的不一樣，於是我們再找下一個接近「17」，而且比 17 大的質數——「23」再來進行試驗，並依照規則進行檢驗，其結果如下：

23+1=24

24 的因數有：1、2、3、4、6、8、12、24

因數的倒數和是：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{26}{24}$

可是這個結果一樣不符合我們的期待。這二個結果讓我們覺得很沮喪，所以我們決定再回頭檢視先前對這組數字：17、18、2、3、9 的分析。這時我突然發現我們先前的分析，疏忽了一個很重要的關鍵——「$\frac{17}{18}$」並不是所有因數的倒數和，而是其中三個因數的倒數和，因為 18 的因數有：1、2、3、6、9、18

因數的倒數和是：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{21}{18}$

而$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$

只是其中三個因數的倒數和而已。這個發現讓我們產生了莫大的鼓舞力量。

接著我們再次以 「19」和「23」這兩個質數來進行檢驗。

19+1=20

20 的因數：1、2、4、5、10、20

它的因數的倒數為$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{20}$

因為我們要的和是「$\frac{19}{20}$」，所以我們選了$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$這三個因數的倒數相加

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$

得到我們要的答案，所以「19」可以滿足這類題目的條件要求。接著我們再依此方法檢驗「23」，

23+1=24

24 的因數有：1、2、3、4、6、8、12、24

它們的倒數是$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{24}$

並選了其中$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{8}$相加

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{23}{24}$

也印證了「23」這個數也可滿足這類題目的條件要求。

接著我們繼續嘗試檢驗比「17」小的質數，看看這樣的規則是否適用於比「17」小的質數上，於是我們從最接近「17」又比「17」小的數——「13」著手，

13+1=14

14 的因數有：1、2、7、14

而除了 1 之外的的倒數分別為：$\frac{1}{2}$ 、$\frac{1}{7}$ 、$\frac{1}{14}$

它們的和為$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{10}{14}$

但這不是我們要的答案，讓我們百思不解，也暫時無法找到突破瓶頸的方法。老師建議我們先保留這個部分，繼續進行其他質數的檢驗，因此，我們繼續檢驗其他 100 以內的質數，並將所有檢驗結果做成下面的表格：

質數	質數+1	「質數+1」的因數	符合條件的因數之倒數和
2	3	1、3	
3	4	1、2、4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
5	6	1、2、3、6	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$
7	8	1、2、4、8	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
11	12	1、2、3、4、6、12	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$
13	14	1、2、7、14	
17	18	1、2、3、6、9、18	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$
19	20	1、2、4、5、10、20	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$
23	24	1、2、3、4、6、8、12、24	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{23}{24}$
29	30	1、2、3、5、6、10、15、30	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$
31	32	1、2、4、8、16、32	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$
37	38	1、2、19、38	
41	42	1、2、3、6、7、14、21、42	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$

43	44	1、2、4、11、22、44	
47	48	1、2、3、4、6、8、12、16、24、48	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{47}{48}$
51	52	1、2、4、13、26、52	
53	54	1、2、3、6、9、18、27、54	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{53}{54}$
59	60	1、2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{59}{60}$
61	62	1、2、31、62	
67	68	1、2、4、17、34、68	
71	72	1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{24}=\frac{71}{72}$
73	74	1、2、37、74	
79	80	1、2、4、5、8、10、16、20、40、80	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{80}=\frac{79}{80}$
83	84	1、2、3、4、6、7、12、14、21、28、42、84	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{84}=\frac{83}{84}$
89	90	1、2、3、5、6、9、10、15、18、30、45、90	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{90}=\frac{89}{90}$
97	98	1、2、7、14、49、98	

※表格「符合條件的因數之倒數和」欄位中的空白儲存格，表示從該「質數+1」的因數組合中，無法找到滿足題目條件要求的倒數和

由上表，我們可以看出，100 以內大部分的質數都可以滿足這類的題目設計（雖然有些質數並不是由 3 個因數倒數滿足條件，而是由 2 個、4 個或 5 個因數倒數組成才能滿足條件，但我們還是將這些質數納入滿足條件的質數，因為只需要稍微調整佈題即可），只有少部分題目無法滿足(在 100 以內的質數共有 26 個，其中 17 個質數符合條件要求，另外 9 個則不符合)。仔細分析這 9 個數，我們發現它們有一個共同的特徵，就是它們的「因數和」減去「質數＋1」小於該質數，用算式表示如下：

「因數和」－「質數＋1」＜質數

換句話說，若要滿足這類的題目設計必須要滿足下列算式：

「因數和」－「質數＋1」≧質數

而「因數和」－「質數＋1」＜質數 ，其產生的原因主要是因為該質數的因數個數較少的緣故。因此我們再一次檢視這 26 個質數與「質數＋1」的因數，發現隨著質數逐漸增大，「質數＋1」的因數個數也必須增加才能滿足***「因數和」－「質數＋1」≧質數***的條件。所以在 10 以內的質數只要 3 個因數即可，而 11~40 之間的質數要有 6 個因數，41 以上的質數則需要 8 個因數才能滿足條件。

三、「雀屏中選」的條件

當我們再進一步深入檢視表格數據後，我們歸納出一個更簡便的檢查方式，這個方法如下：

只要符合下列二個條件的數，即可滿足這類題目的條件要求：

（1）這個數是一個質數。

（2）任取數個「質數+1」的因數，其和為此質數。

這些單位分數相加時必須先通分，而且因為這些單位分數皆為「質數+1」的因數之倒數，所以他們通分後的分母就是這些因數的最小公倍數，即是「質數+1」。此外，因數有「成對對應」的關係，即一個因數必可找到另一因數（或本身）與之配對使兩者之乘積恰為「質數+1」，最大的因數與最小的因數配對，第二大的因數與第二小的因數，……以此類推，當「質數+1」有奇數個因數時，則最中間的因數乘以本身的乘積會等於「質數+1」，因此取分母為「質數+1」，通分後的分子也都會是「質數+1」的因數。

四、逆向思考，創新發現

完成上面的研究後，我們心血來潮的想著：既然「質數+1」這方面的滿足條件都確定了，那我們何不反過來嘗試「質數-1」這方面的探索呢？我們會將「質數-1」設為研究主題，是因為它與「質數+1」有個共通性。除了 2 以外的質數，它們加 1 後的數，一定有 1 和本身之外的因數。同樣的，除了 2、3 以外的質數，它們減 1 後的數，也一定有 1 和本身之外的因數。

但是這當中還有一個難題要克服，原本的題目設計，要分配的事物是收受者想要的，所以當物品的數目增加時，大家都願意接受，可是如果物品減少時應該會引起強烈反彈吧！所以我們覺得如果要設計「質數-1」遊戲時，還必須重新佈題。在經過一番討論之後，我們訂定了下列的佈題原則：

(一)、　要分配的物品是收受者不想要，而希望減少的。

(二)、　不能犧牲任何人的權益。

(三)、　收受者收受的物品必須是整數

根據上述的三個原則，我們討論很久之後，要滿足這類問題的要求條件與先前「質數+1」的條件恰好相反，它們分配比例的總和必須大於 1，並根據之前研究「質數+1」的經驗，歸納出分配比例的總和，其分母等於「質數-1」，而分子則為質數，並嘗試佈題，題目如下：

「為慶祝兒童節，學校推出闖關活動，只要闖關成功，每個人可到活動場地玩一項自己喜歡的遊戲器材。闖關的方式分成小隊進行，而闖關的規則是：以三人或三人以上組成小隊，接著必須答對關主設計的十三道（或以上）題目，而且 1 號隊員要答對題目總數的二分之一，2 號隊員要答對三分之一的總題數，3 號隊員則要答對四分之一的總題數……，請問每個隊員必須分別答對關主幾道題目？」

研究至此，我們都覺得很高興，因為我們不但解決先前的問題，更藉著逆向操作設計了新的遊戲題目。在前面的探討時，我們已訂定了兩個檢驗條件，探討這個新的遊戲題目時，為了排除必然解而增訂了第三項，所以我們討論出下列三項的檢查原則：

(一)、　這個數是質數

(二)、　任取數個「質數-1」的因數，其和為此質數

(三)、　「質數-1」不列入因數選取的範圍

因為我們只是要檢驗該數目能不能滿足新遊戲的要求條件，所以我們採用「因數和」的方法，若遇到有多種解法的數目時，我們也僅列舉一組可行的因數和為代表，不再一一列舉。另外，我們還發現，其實每個質數都符合條件，因為任何數的因數一定包含 1 與此數本身，且 1+（質數-1）=質數，但因為 1 與「質數-1」的組合為必然解，缺乏可探討性，所以我們在下面的表格列出符合要求條件的數時不考慮 1 與該「質數-1」的組合。

根據上述原則，我們找出 100 以內符合新遊戲規則的數字，並做成下面的表格：

質數	質數-1	「質數-1」的因數	符合條件的因數和
2	1	1	
3	2	1、2、4	
5	4	1、2、4	
7	6	1、2、3、6	
11	10	1、2、5、10	
13	12	1、2、3、4、6、12	3+4+6=13
17	16	1、2、4、8、16	
19	18	1、2、3、6、9、18	1+3+6+9=19
23	22	1、2、11、22	
29	28	1、2、4、7、14、28	
31	30	1、2、3、5、6、10、15、30	6+10+15=31
37	36	1、2、3、4、6、9、12、18、36	3+4+12+18=37
41	40	1、2、4、5、8、10、20、40	2+4+5+10+20=41
43	42	1、2、3、6、7、14、21、42	2+6+14+21=43
47	46	1、2、23、46	
51	50	1、2、5、10、25、50	
53	52	1、2、4、13、26、52	
59	58	1、2、29、58	

61	60	1、2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60	5+6+20+30=61
67	66	1、2、3、6、11、22、33、66	1+11+22+33=67
71	70	1、2、5、7、10、14、35、70	5+7+10+14+35=71
73	72	1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72	1+12+24+36=73
83	82	1、2、41、82	
89	88	1、2、4、8、11、22、44、88	1+4+8+22+44=89
97	96	1、2、3、4、6、8、12、16、24、32、48、96	1+8+16+24+48=97

※表格「符合條件的因數和」欄位中的空白儲存格，表示從該「質數-1」的因數組合中，無法找到滿足題目條件要求的因數和

伍、研究結果

經由我們的研究、討論與歸納，我們得到下列的結果：

一、 因為$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}<1$，所以如果按照遺囑的分配原則來分遺產，並沒有分完所有的駱駝，所以族長「送」給三兄弟的駱駝最後能安然無恙的回到族長的手中。

二、 駱駝的數目除了可以用「17」之外，還有其他數字可以滿足這個類型題目的設計。

三、 只要符合下列二個條件的數，即可滿足這類題目的條件要求：

（1）這個數是一個質數。

（2）任取數個「質數+1」的因數，其和為此質數。

四、 逆向思考，我們設計了以「質數-1」方式解決問題的新遊戲。

陸、討論

「質數」、「因數」、「倍數」，這些數之間的關係困擾著很多同學，讓他們每每聽到這些數的名字時，放棄的念頭便油然而生，或許是因為在日常的生活經驗中，很少有機會接觸到這些名詞，更別說用它們之間的關係來解決問題，因此，若將這種有趣的題目融入「因數」、「倍數」、「質數」的教學中，讓同學探索，應該可以有效的引起他們的學習動機，達到更佳的學習效果及學習目標。

本研究能讓我們透過分析、歸納的過程來增進邏輯思考的能力，這個解題過程像在玩偵探推理遊戲，而謎底揭曉後，再用這個規則來設計一道道的謎題，讓大家能輕鬆的「玩」數學。

柒、結論

雖然這個研究探索的範圍僅限於 100 以內的質數，但經過一次又一次的檢驗過程，我們有信心這二個檢驗原則（研究結果三）同樣適用於大於 100 的數。

這次的研究，讓我們對「因數」、「倍數」、「質數」之間的關係又多了一層的認識，真沒想到這些讓很多同學感到頭痛的數，竟然可以被設計成如此有趣的數學遊戲，希望自己將來也能設計一些不一樣的有趣題目，和同學一起玩數學。雖然在探索的過程中，我們也曾經遭遇一些挫折，令我們感到沮喪、萌生退意，但是當我們透過分析、討論、歸納後，找到解答時，心中的喜悅絕不是筆墨所能形容的。這次的經驗，讓我們得到一個很深刻的體悟——遇到看似難解的困難時，不要急著放棄，因為只要我們一步一步抽絲剝繭找線索、釐清問題，並用心思考解決的方法，就有機會突破困境，得到滿意的結果。

捌、參考資料及其他

1、 蘇建中(民106)。**國民小學數學第九冊(17-30頁、73-76頁)**。台南：南一書局。

2、 馬丁・李(Martin Lee)(2009)。**40趣味數學推理(14頁)**。台北：天下遠見。

3、 聖嚴法師(2011)。**108自在語(117頁)**。台北：財團法人聖嚴教育基金會。