

嘉義市第 36 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：落「井」下棋——利用井字遊戲探討搶 15、 $3\times 3\times 3$ 立方體井字遊戲策略

關 鍵 詞：井字遊戲、搶 15 遊戲、立方體

編 號：

落「井」下棋——利用井字遊戲探討搶 15、3×3×3 立方體井字遊戲策略

摘要

井字遊戲是很多人從小就會玩的遊戲，這個遊戲雖然簡單卻變化多端。我們試著將井字遊戲的策略應用在搶 15 遊戲，以及 3×3×3 立方體井字遊戲上，經過研究我們發現搶 15 的遊戲

1. 數字 5 是雙方都必須極力拿到的。
2. 第一位第一手玩家不拿 5 以外的奇數才能提高獲勝機會。

3×3×3 立方體井字遊戲

1. 如果立方體的斜對角線（4 條）也算連線，那先搶佔正方體中心的將獲勝。
2. 如果立方體的斜對角線不算連線，利用井字遊戲獲勝的策略，先下必勝。

壹、研究動機：

五上時，老師帶我們玩了「井字遊戲」，而這個雖然簡單卻有滿多變化的遊戲，其實只要花些心思，大部分的同學就可以掌握到獲勝或者立於不敗之地的訣竅。因此，當老師再向我們介紹了「搶 15、3×3×3 立方體井字遊戲」時，因同學們在當時也正熱衷於玩魔術方塊（成為我們立方體的討論模型），就使我們想到可以利用井字遊戲的技巧，來探討「搶 15 遊戲」、「立方體井字遊戲」的遊戲策略。

貳、研究目的：

- 一、利用井字遊戲探討搶 15 的遊戲策略。
- 二、利用井字遊戲探討立方體 3×3×3 井字遊戲的遊戲策略。



參、研究設備及器材：

- 一、3×3×3 立方體井字遊戲紙筆遊戲表。
- 二、3×3×3 立方體井字遊戲模型。
- 三、魔術方塊（立方體模型）。
- 四、數字牌 1-9 一份。

肆、研究過程或方法：

一、井字遊戲

（一）玩法：

兩個玩家，利用 3×3 的方格，輪流在方格上打圈(○)，打叉(×)，標示自己的符號，最先以橫、直、斜連成一線者為勝。

（二）遊戲策略：

為了討論方便，而且九宮格的「角」、「邊」、「中央」經過旋轉以及翻轉後，並不會改變身份，因此我們將旋轉以及翻轉後，棋面仍然一樣的看做同一種下法，如下圖：

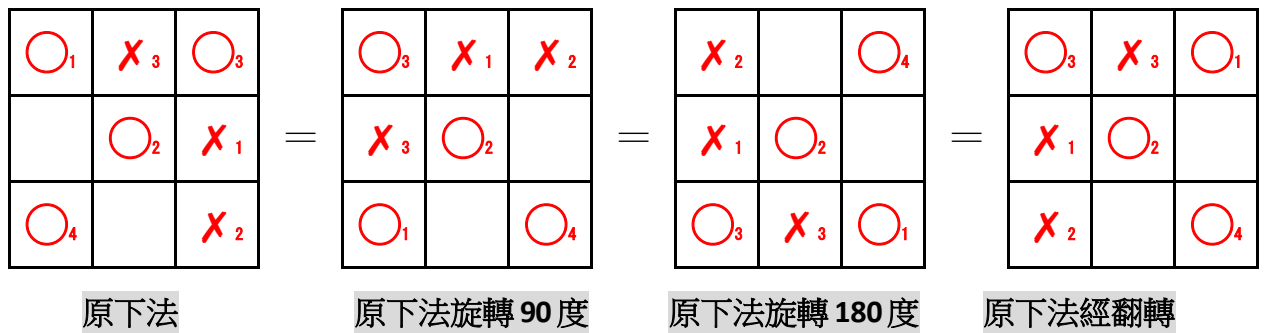


圖 1 經過旋轉以及翻轉後，棋面仍然一樣的看做同一種下法

根據我們實際去玩、網路上的資料，以及老師提供的資料，我們知道井字遊戲是由第一位玩家（先攻）所掌控的遊戲，第二位玩家處於被動，雙方如果是理智的，且下法無誤，最終結果將是雙方和局收場，原因與狀況如下：

1. 第一位玩家（打圈）第一手下在角位，則第二位玩家（打叉）第一手就只能下在中央，否則必輸。

下圖說明第一位玩家第一手下在角位，第二位玩家第一手不管是下在邊或者角位，只要第一位玩家秉持「第二手下的位置將使第一位玩家預備連線」，那麼第二位玩家將從此淪為完全被動的防守方，第一位玩家再將第三手下在製造分岔（維基百科：製造一個能在兩個方向上連線的機會）上，那麼第二位玩家就必定輸棋。

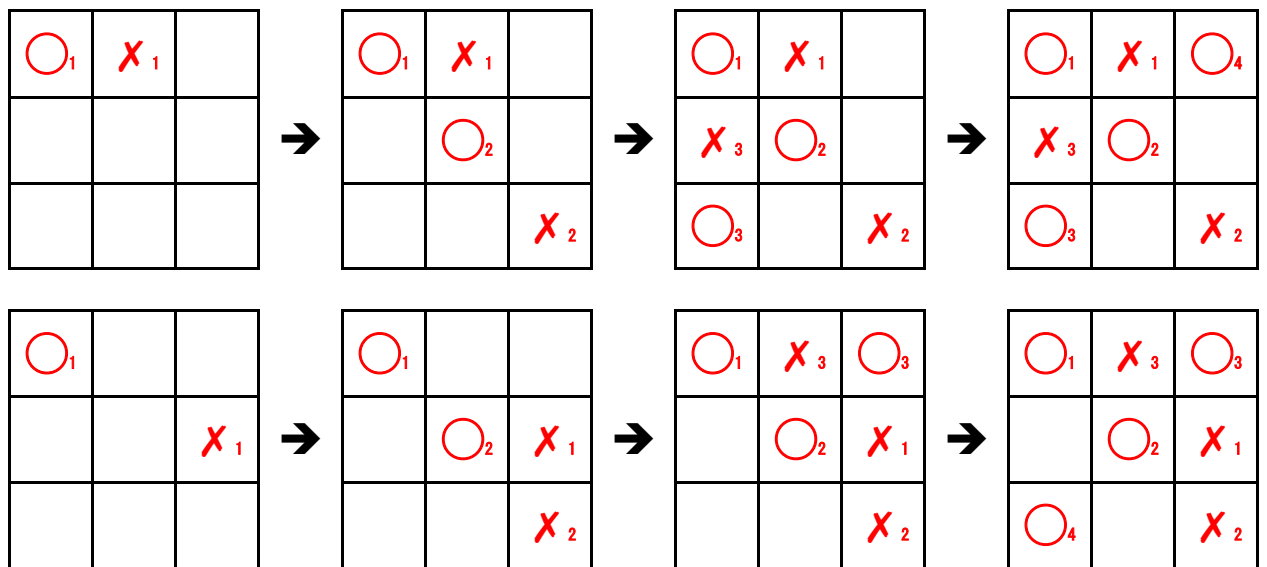
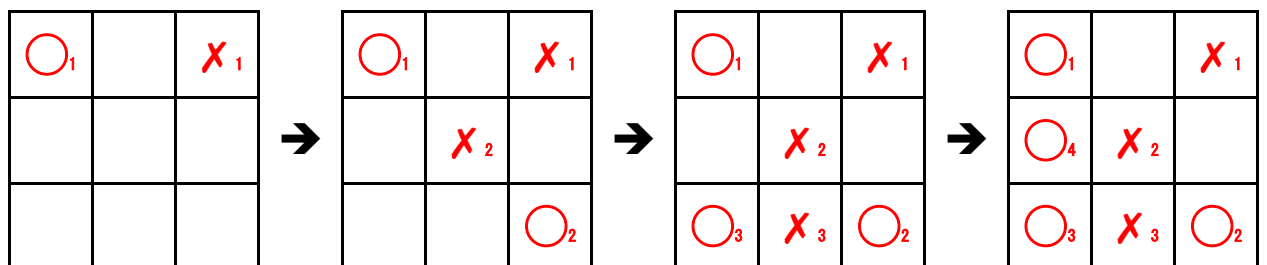


圖 2 第一位玩家第一手下在角位，第二位第一手玩家下邊位將導致輸棋



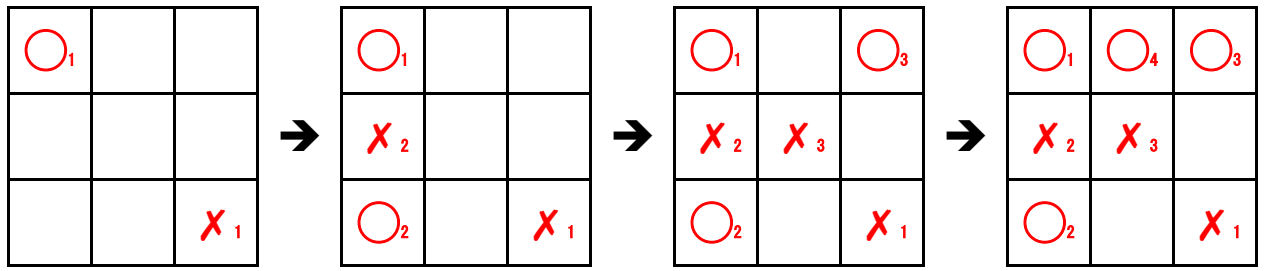


圖 3 第一位第一手玩家下在角位，第二位第一手玩家下角位將導致輸棋

2. 第一位玩家（打圈）第一手下在中央，則第二位玩家就只能下在角位，否則必輸。

下圖說明第一位玩家第一手下在中央，第二位玩家第一手如果下在邊位，那麼第一位玩家不管第二手下在哪裡，都將使第二位玩家淪為完全被動的防守方，第一位玩家再將第三手下在製造分岔（維基百科：製造一個能在兩個方向上連線的機會）上，那麼第二位玩家就必定輸棋。

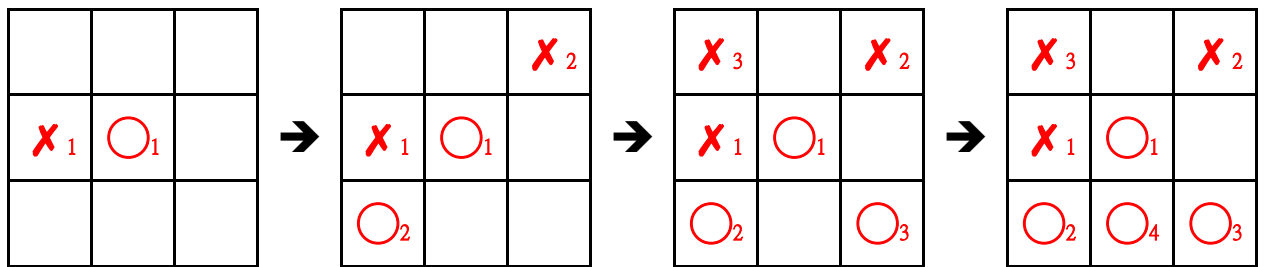


圖 4 第一位玩家第一手下在中央，第二位玩家第一手下邊位將導致輸棋

3. 第一位玩家（打圈）下在邊位，那麼局勢就會有比較多的變化：

- (1) 第一位玩家（打圈）下在邊位，第二位玩家如果下在鄰近的邊位以及較遠的角位，那麼第二位玩家就必輸。

下圖說明第一位玩家第一手下在邊位，第二位玩家如果下在鄰近的邊位以及較遠的角位，只要第一位玩家秉持「第二手下的位置將使第一位玩家預備連線」，那麼第二位玩家將從此淪為完全被動的防守方，第一位玩家再將第三手下在製造分岔（維基百科：製造一個能在兩個方向上連線的機會）上，那麼第二位玩家就必定輸棋。

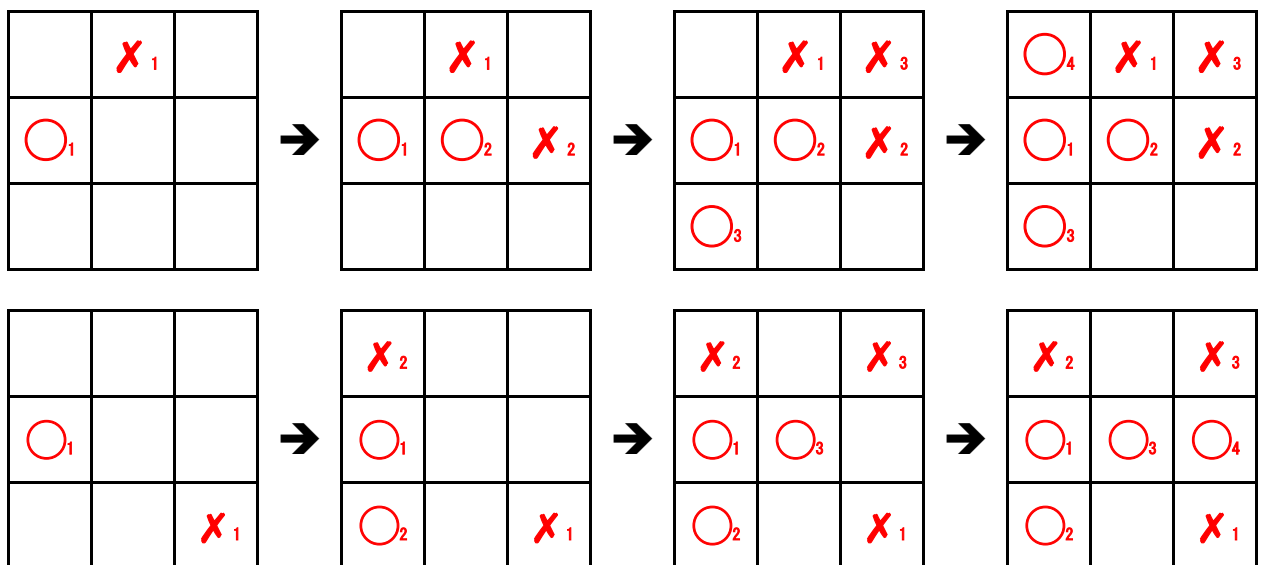


圖 5 第一位玩家第一手下在邊位，第二位玩家第一手下在邊位和角位輸棋的狀況

(2) 除上述情形外，第一位玩家（打圈）下在邊位，第二位玩家下在其他的邊位、角位以及中央，雙方都會和局。

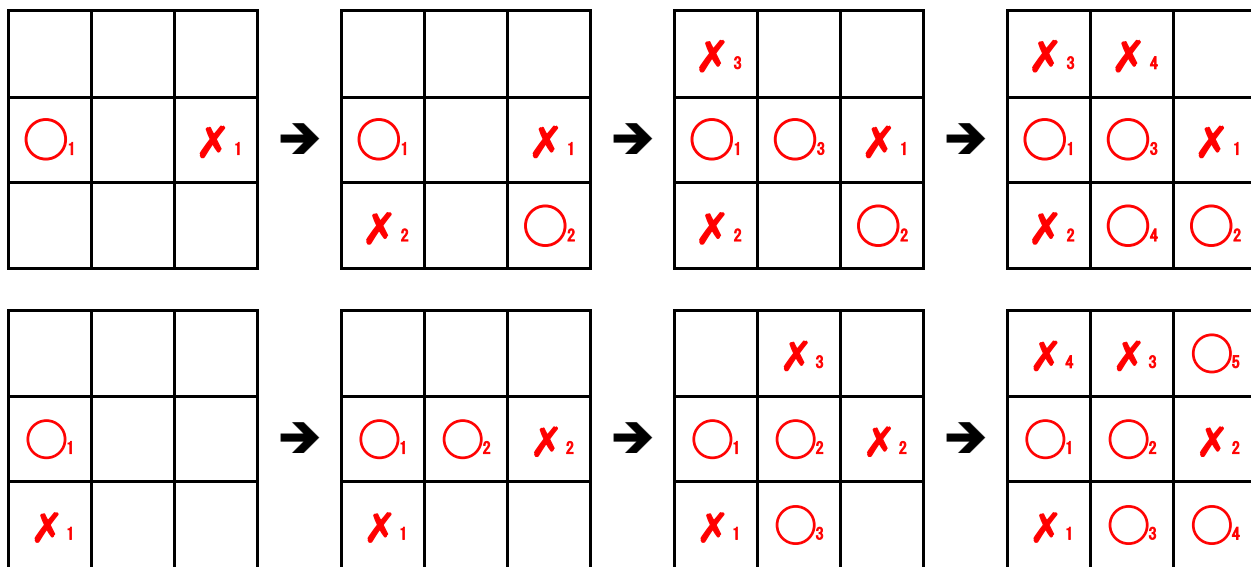


圖 6 第一位玩家第一手下在邊位，第二位玩家第一手下在邊位和角位和局的狀況

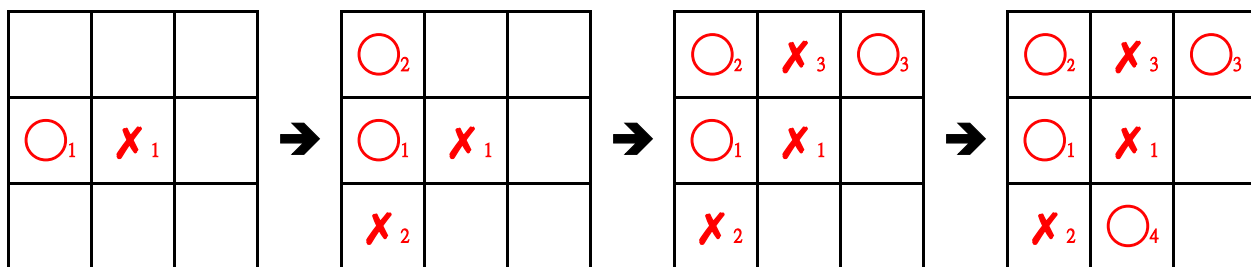


圖 7 第一位玩家第一手下在邊位，第二位玩家第一手下在中央和局的狀況

二、 搶 15 遊戲

(一) 搶 15 遊戲玩法

兩個玩家，從 1-9 的數字堆中，輪流每次分別拿取一張牌，拿到的牌中，**任 3 張總和剛好為 15 者獲勝**。

(二) 搶 15 遊戲和井字遊戲

當我們試著將數字 1-9 填入 3x3 的方格中，並且符合方格中不管橫、直、斜對角的數字和（和=15）都一樣（也就是俗稱的幻方，魔方陣），那麼搶 15 的遊戲和井字遊戲可以看做視同一種遊戲，因此也可以使用一樣的遊戲策略。也就是說，我們可以利用井字遊戲的遊戲策略來玩搶 15 遊戲。

4	9	2	4+9+2=15 (橫)	4+3+8=15 (直)
3	5	7	3+5+7=15 (橫)	9+5+1=15 (直)
8	1	6	8+1+6=15 (橫)	2+7+6=15 (直)
			2+5+8=15 (斜)	4+5+6=15 (斜)

圖 8 在方格中填入 1-9，使直、橫、對角的數字和都一樣

(三) 搶 15 遊戲策略探討

1. 第一位玩家第一手拿 4 (或 2 或 6 或 8，亦即井字遊戲下在角位)，第二位玩家第一手必須拿 5 (中央) 才會和局，賽事的發展如下：

- (1) 如果第一位玩家第二手拿 6 (對角角位)，第二位玩家第二手就必須拿奇數 (必須下在邊位，不能下角位)，雙方才會和局。

	第一手	第二手	第三手	第四手	第五手	勝敗
玩家一	4 (角位)	6 (角位)	1 (邊位)	2 (角位)	3 (邊位)	和局
玩家二	5 (中央)	9 (邊位)	8 (角位)	7 (邊位)		和局

- (2) 如果第一位玩家第二手拿鄰近的角位 (偶數)，第二位玩家從第二手起就被迫防阻第一位玩家，雙方會和局。

	第一手	第二手	第三手	第四手	第五手	勝敗
玩家一	4 (角位)	2 (角位)	1 (邊位)	7 (邊位)	8 (角位)	和局
玩家二	5 (中央)	9 (邊位)	3 (邊位)	6 (角位)		和局

- (3) 如果第一位玩家第二手拿邊位 (奇數)，雙方將互相防阻對方導致和局。

	第一手	第二手	第三手	第四手	第五手	勝敗
玩家一	4 (角位)	2 (角位)	1 (邊位)	7 (邊位)	8 (角位)	和局
玩家二	5 (中央)	9 (邊位)	3 (邊位)	6 (角位)		和局

2. 第一位玩家第一手拿 5 (亦即井字遊戲下在中央)，第二位玩家第一手必須下角位 (拿偶數，絕對不能拿奇數) 才會和局，賽事的發展如下：

	第一手	第二手	第三手	第四手	第五手	勝敗
玩家一	5 (中央)	8 (角位)	9 (邊位)	7 (邊位)	6 (角位)	和局
玩家二	4 (邊位)	2 (角位)	1 (邊位)	3 (邊位)		和局

3. 為了提高獲勝的機會，第一位玩家第一手不拿除了 5 之外的奇數 (邊位)。

三、 3x3x3 立方體井字遊戲

(一) 3x3x3 立方體井字遊戲命名與紙筆遊戲表

為了遊戲與討論方便，我們對 3x3x3 立方體的各個位置的命名如下，並且發展出兩

種可以在平面上玩的紙筆遊戲表，如下圖：

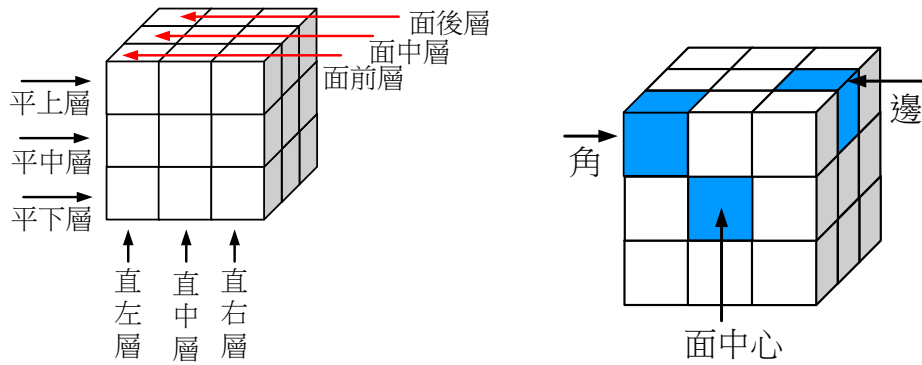


圖 9 立方體各個位置命名

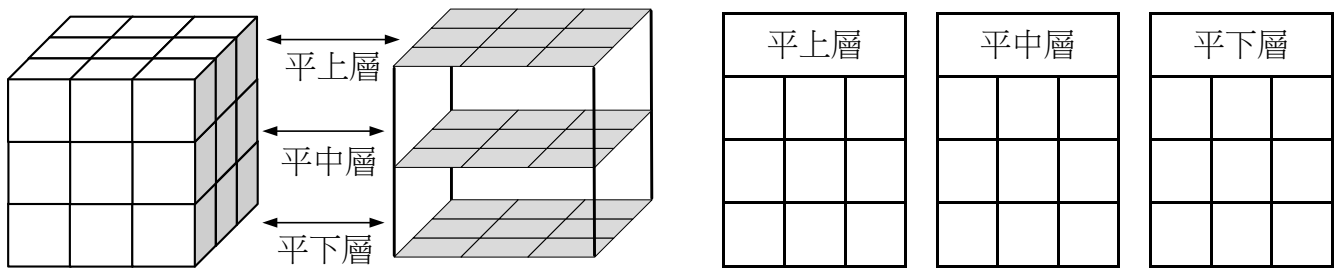


圖 10 立方體井字遊戲紙筆遊戲對照

(二) 玩法

跟井字棋玩法相似，玩家必須在立方體的空間中，不管是在哪一層，達到直、橫、斜，或者立方體的斜對角線（共有四條）連成一線才算獲勝。

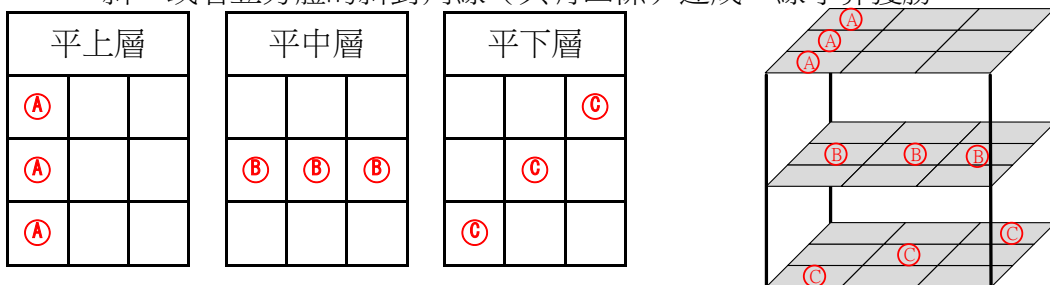


圖 11 A、B、C 分別在平（上中下）層連成一線

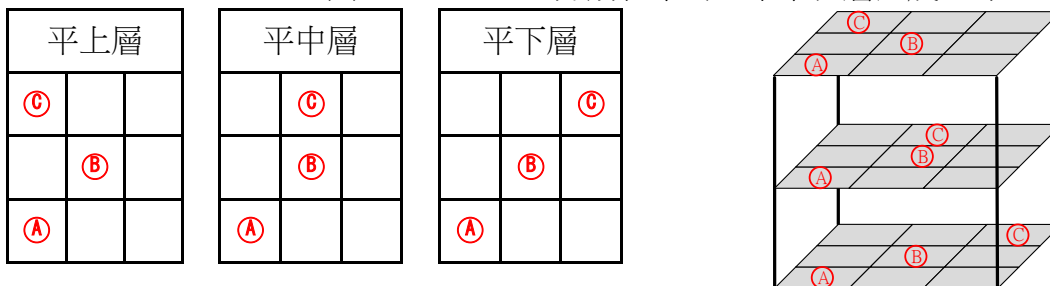


圖 12 A、B、C 分別在面（前中後）層連成一線

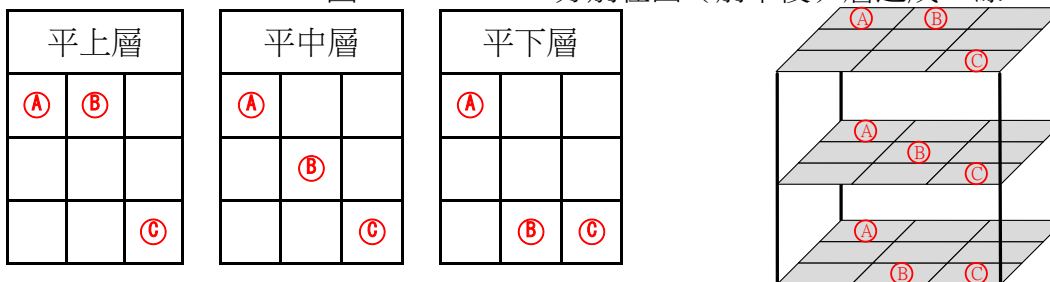


圖 13 A、B、C 分別在直（左中右）層連成一線

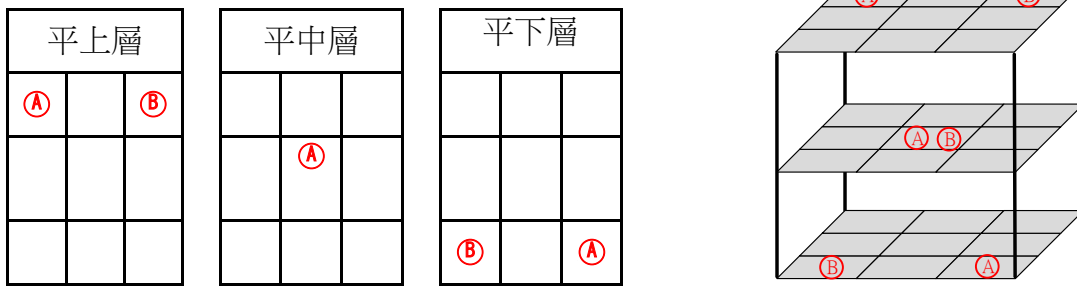


圖 14 A、B 分別在立方體的斜對角線連成一線

(三) 3x3x3 立方體井字遊戲和井字遊戲

任何下在立方體上的棋步，都可看做同時在好幾個軸向的平面井字棋落下棋子，以

圖 15 舉例說明：

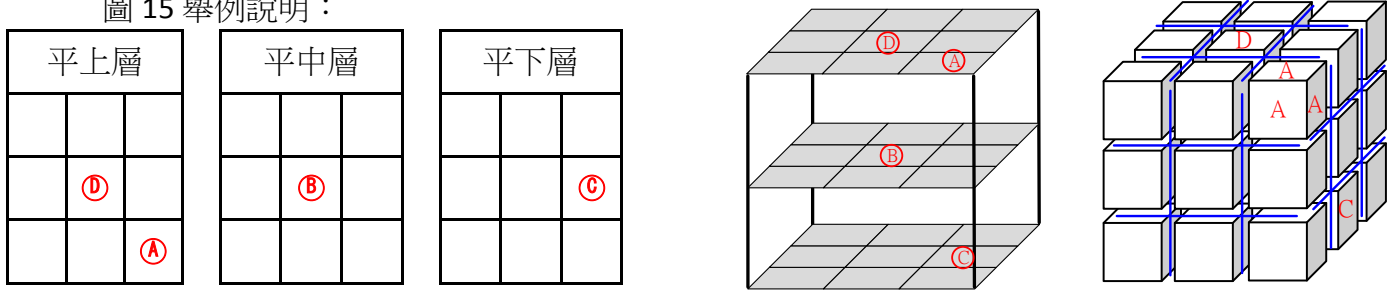


圖 15 下在立方體上的棋步，都可看做同時在好幾個軸向的平面井字棋落下棋子

1. 當玩家下在 A 時（立方體的角位），可以看做同時下在平面井字的「平上」、「直右」、「面前」的角位，同時還有 1 條立方體斜對角線的端點。
2. 當玩家下在 B 時（立方體的中心），可以看做同時下在平面井字的「平中」、「直中」、「面中」的中央，同時還有 4 條立方體斜對角線的中點。
3. 當玩家下在 C 時（立方體的邊位），可以看做同時下在平面井字的「平下」、「直右」的邊位、「面中」的角位。
4. 當玩家下在 D 時（立方體面的中央），可以看做同時下在平面井字的「平上」的中央，還有「直中」、「面中」的邊。

(四) 3x3x3 立方體井字遊戲策略探討

利用前面討論的井字遊戲策略，我們整理搶 3x3x3 立方體井字遊戲的策略如下：

1. 當第一位玩家第一手下在 3x3x3 立方體的角位時，如上圖 15 的 A，此時第二位玩家如果第一手下在正方體的中心，局面反而變成對第二位玩家有利，第一位玩家將因為無法應付正方體中心被佔走而輸棋。

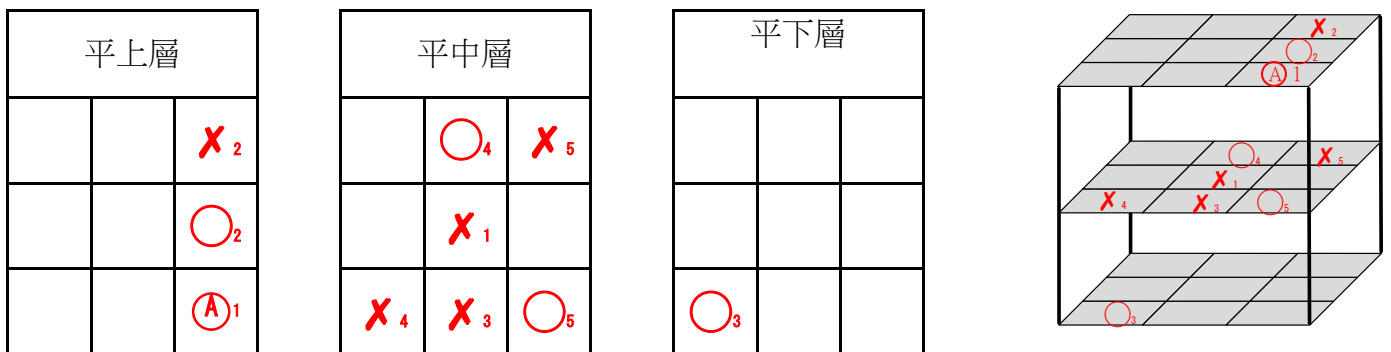


圖 16 第一位玩家第一手下在立方體的角位時，第二位玩家將第一手下在正方體中心將可獲勝

2. 當第一位玩家第一手下在 $3 \times 3 \times 3$ 立方體的中心時，如上圖 15 的 B，等於同時下在 3 個平面（「平中」、「直中」、「面中」）井字棋的中央，以及 4 條立方體斜對角線的中點，而我們知道此時第二位玩家勢必要同時下在「平中」、「直中」、「面中」三個平面井字棋的角位，但是由下圖可以知道「平中」、「直中」、「面中」三個盤面的角位，它們共同的交集並不是同一個位置。所以只要第一位玩家第一手下在 $3 \times 3 \times 3$ 立方體的中心，第二位玩家必定輸棋。

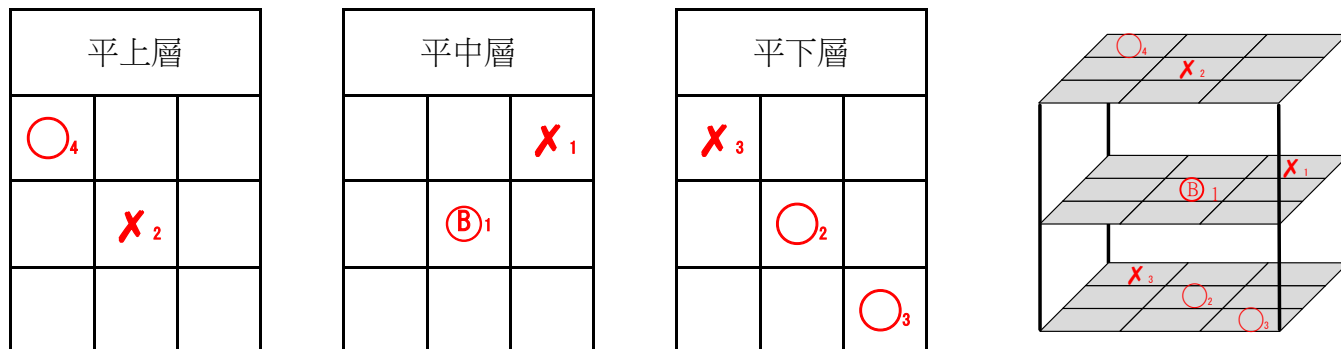


圖 17 第一位玩家第一手下在立方體的中心，第二位玩家將無法完全下在對應盤面的角位而輸棋

3. 當第一位玩家第一手下在 $3 \times 3 \times 3$ 立方體的邊位時，如上圖 15 的 C，等於同時下在平面井字的「平下」、「直右」的邊位、「面中」的角位，此時**第二位玩家如果第一手下在正方體的中心**，局面反而變成對第二位玩家有利，第一位玩家將因為無法應付正方體中心被佔走而輸棋。

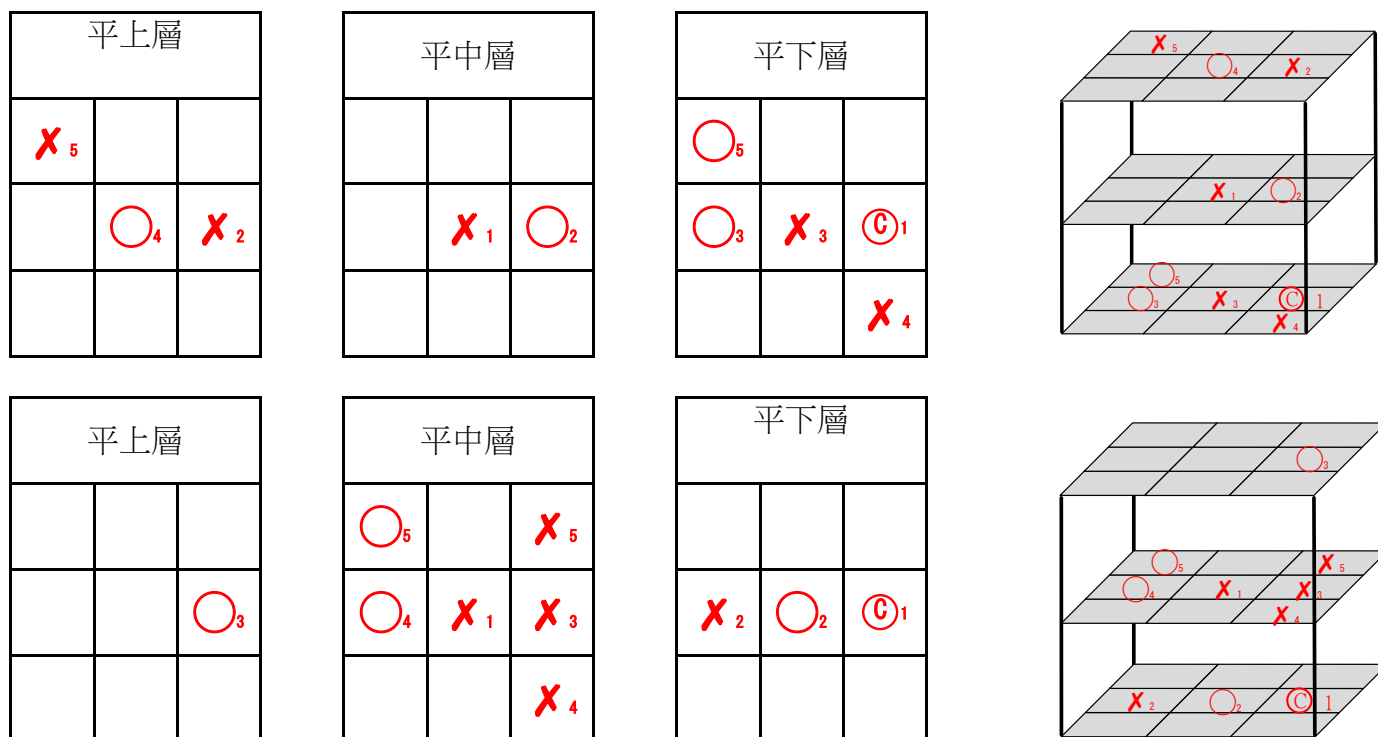


圖 18 第一位玩家第一手下在立方體的角位時，第二位玩家將第一手下在正方體中心將可獲勝

4. 當第一位玩家第一手下在 $3 \times 3 \times 3$ 立方體面的中央時，如上圖 15 的 D，等於同時下在平面井字的「平上」的中央，還有「直中」、「面中」的邊，此時**第二位玩家如果第一手下在正方體的中心**，局面反而變成對第二位玩家有利，第一位玩家將因為無法應付正方體中心被佔走而輸棋。

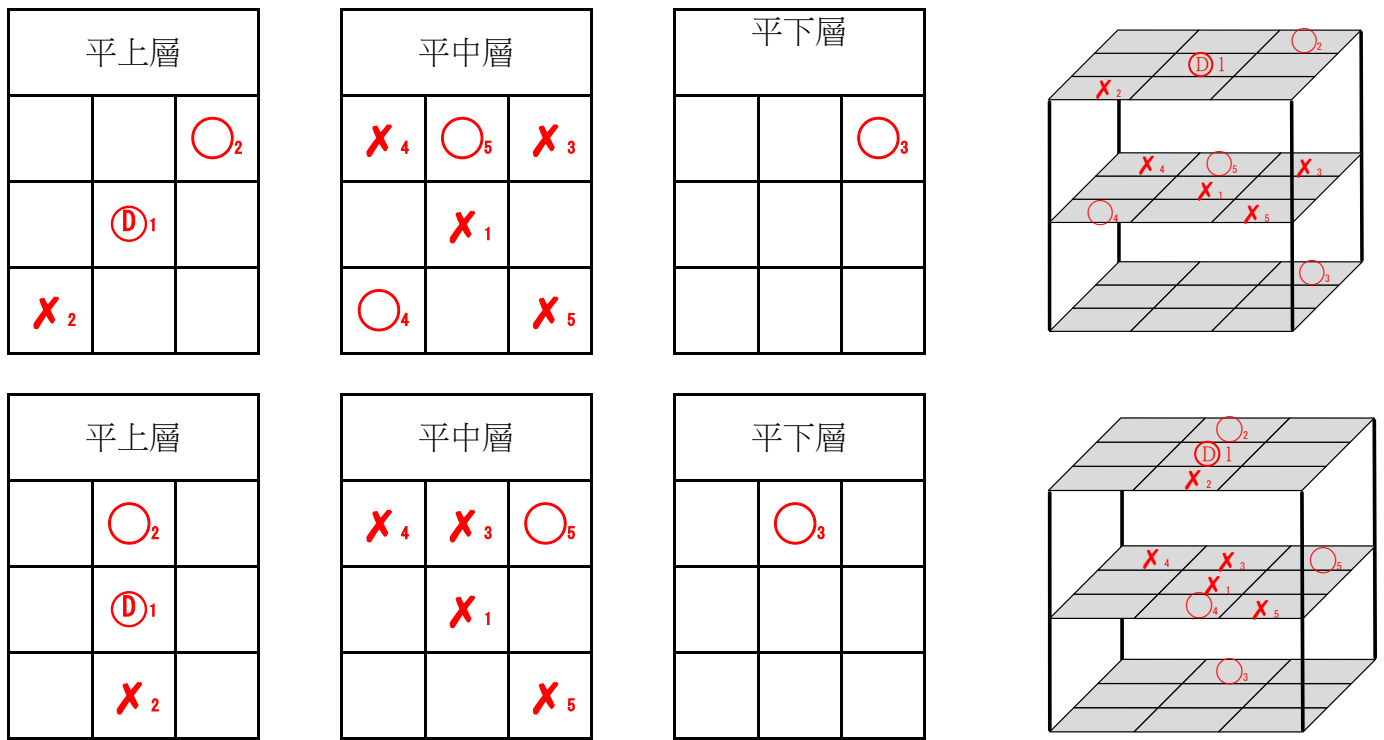


圖 19 第一位玩家第一手下在立方體面的中央時，第二位玩家將第一手下在正方體中心將可獲勝

伍、 研究結果：

一、 搶 15 遊戲

搶 15 遊戲的玩家，如果能夠應用圖 8 (5 在中央，偶數在角位，其他奇數在邊位)，那麼這個遊戲的玩法就和井字遊戲一樣，遊戲發展與策略將變得比較容易掌握：

- (一) 第一位玩家第一手拿 2 或 4 或 6 或 8 (偶數，角位)，第二位玩家第一手一定要拿 5，否則必輸。
- (二) 第一位玩家第一手拿 5，第二位玩家第一手一定要拿 2 或 4 或 6 或 8 (偶數，角位)，否則必輸。
- (三) 第一位玩家要避免第一手拿數字 1、3、7、9 (奇數，邊位)，否則很容易和局。

二、 3x3x3 立方體井字遊戲

(一) 3x3x3 立方體井字遊戲因為有 4 條斜對角線都交會在正方體的中心，如果斜對角線的連線也算獲勝的連線，那麼兩位玩家誰先下在正方體中心，就必定會獲勝：

1. 第一位下在正方體的角位，第二位玩家下在正方體的中心，第二位玩家必定會獲勝。
2. 第一位下在正方體的中心，第二位玩家下在正方體的角位，第一位玩家必定會獲勝。

(二) 如果斜對角線的連線不算是獲勝的連線：

1. 第一位玩家如果下在立方體的角位，如圖 15 的 A，那麼可以看做同時下在 3 個平面 (「平上」、「直右」、「面前」) 井字棋的角位，我們知道此時第二位玩家勢必要同時下在「平上」、「直右」、「面後」三個平面井字棋的中央，否則必然輸棋。但是「平上」、「直右」、「面前」三個盤面的中央，它們共同的交集並不是同一個位置。所以只要第一位玩家第一手下在 3x 3x3 立方體的角位，不管第二位玩家如何因應，第一位玩家只要專注在第二位玩家沒有回應到的盤面，第二位玩家必定輸棋。
2. 第一位玩家如果下在立方體的中心，如圖 15 的 B，等於同時下在 3 個平面 (「平中」

「直中」、「面中」)井字棋的中央，而我們知道此時第二位玩家勢必要同時下在「平中」、「直中」、「面中」三個平面井字棋的角位，但是「平中」、「直中」、「面中」三個盤面的角位，它們共同的交集並不是同一個位置。所以只要第一位玩家第一手下在 $3 \times 3 \times 3$ 立方體的中心，第二位玩家必定輸棋。

3. 第一位玩家如果下在立方體的邊位，如圖 15 的 C，可以看做同時下在平面井字的「平下」、「直右」的邊位、「面中」的角位，此時第二位玩家就必須先下在「面中」的中央（第一位玩家第一手下角位，第二位玩家第一手必須下中央），但是卻仍無法同時回應到「平下」、「直右」的邊位，第二位玩家還是輸棋。
4. 第一位玩家如果下在立方體面的中央，如圖 15 的 D，可以看做同時下在平面井字的「平上」的中央，還有「直中」、「面中」的邊，此時第二位玩家就必須先下在「平上」的角位（第一位玩家第一手下中央，第二位玩家第一手必須下角位），但是卻仍無法同時回應到「直中」、「面中」的邊位，第二位玩家還是輸棋。

陸、 討論與結論

一、 搶 15 遊戲

- (一) 在雙方都理性且不犯錯的情況下，井字遊戲是個必然會和局的遊戲，而我們利用井字遊戲的策略來玩搶 15 遊戲，也就是將 1-9 填入九宮格中，變成一個直、橫、斜角的和都是 15 的幻方（魔方陣），只要雙方都熟記這個幻方（5 在中央，其餘奇數在邊位，偶數在角位），並且掌握井字遊戲的訣竅，那麼搶 15 的遊戲也必然會和局收場。
- (二) 5 是雙方都必須極力拿到的，第二位玩家如果沒有在一開始拿到 5，第一手也絕不能拿 5 以外的其他奇數。
- (三) 為了提高獲勝的機會，第一位第一手玩家不拿 5 以外的奇數。

二、 $3 \times 3 \times 3$ 立方體井字遊戲

- (一) 如果立方體的斜對角線（4 條）也算連線，在雙方都理性且不犯錯的情況下，不管先下或後下，先下在正方體中心的都將獲勝。
- (二) 如果立方體的斜對角線不算連線，先手不管如何下，都會獲勝。

柒、 參考資料及其他

1. 新竹高中數學科網站。戀練數學：『有趣的魔方陣』。線上檢索日期：2018 年 2 月 8 日。網址：<https://goo.gl/hGAiUi>。
2. 維基百科。井字棋。線上檢索日期：2017 年 12 月 8 日。網址：<https://goo.gl/nxdpCv>。
3. 尤怪的家。線上檢索日期：2018 年 2 月 8 日。網址：<http://oddest.nc.hcc.edu.tw/>。